

VII Drużynowe Matematyczne Mistrzostwa Bydgoszczy

Zadanie 1.

Rozwiązać nierówność $|x^3 - 9x| \leq x^3 - 9x$.

Zadanie 2.

Udowodnić, że $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, jeżeli $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ i $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$.

Zadanie 3.

Przy jakiej podstawie systemu p liczba $(109)_{10}$ (zapisana w systemie dziesiętnym) byłaby zapisana w postaci $(257)_p$?

Zadanie 4.

Dla jakich wartości parametru $a > 0$ nierówności

$$x^2 - 2ax - 4 + 4a > 0 \quad \text{i} \quad ax^2 - (2a + 2)x + a + 2 > 0$$

nie mają wspólnych rozwiązań?

Zadanie 5.

Dla jakich wartości parametru m równanie $mx^3 - 3mx^2 + (2m + 1)x - 2 = 0$ ma trzy różne rozwiązania?

Zadanie 6.

Naszkiecować wykres funkcji $f(x) = 2018x \cdot \sqrt[2018]{x} \cdot \sqrt[2018]{-\sin^{2018}x}$.

Zadanie 7.

Obliczyć

$$\sqrt{7 \sqrt{3 \sqrt{7 \sqrt{3 \sqrt{7 \dots}}}}}$$

Zadanie 8.

Suma wyrazów pewnego szeregu geometrycznego jest równa 2. Wyznaczyć ten szereg, jeżeli suma jego wyrazów o numerach parzystych, suma jego wyrazów o numerach nieparzystych i suma jego wszystkich wyrazów tworzą ciąg arytmetyczny.

Zadanie 9.

Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ ($AB \parallel CD$), w którym $AB = 3CD$.

- Obliczyć promień okręgu opisanego na tym trapezie, jeżeli $AB = 18$, $AC = 13$.
- Udowodnić, że przekątne tego trapezu dzielą odcinek łączący środki jego ramion w stosunku 1:2:1.

Zadanie 10.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ taki, że okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC są styczne. Udowodnić, że w ten czworokąt można wpisać okrąg.

Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe? Odpowiedź uzasadnić.